Über den Beweis der Normalverteilung gewisser der Ermittlung von Spektraldichten dienenden Schätzfunktion

Baranoff , Alexis von

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 20, 1968,
S. 179-197

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Über den Beweis der Normalverteilung gewisser der Ermittlung von Spektraldichten dienenden Schätzfunktionen*)

Von Alexis von Baranoff

Vorgelegt von Hermann Blenk

(Eingegangen am 14. 6. 1968)

Übersicht: Es wird unter Benutzung einer Methode von *M. Loève*, gezeigt, daß die Schätzfunktionen, die die Spektraldichten eines stationären Zufallsprozesses auf Grund einer endlichen, diskreten Beobachtungsfolge zu ermitteln gestatten, eine Normalverteilung besitzen. Die Arbeit ergänzt somit eine zuvor erschienene Untersuchung des Verfassers, in der die Normalverteilung nur für den Fall sehr umfangreicher Beobachtungsreihen bewiesen werden konnte.

Summary: By applying a method due to *M. Loève*, the author proves the normal distribution of certain estimators established for calculating the spectral density functions of stationary random processes when a discrete-time finite sample of the process has been observed. The present paper thus generalizes a previously published result, where the normal distribution had only been proved for the case of large samples.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit des Verfassers [1] wurden gewisse Schätzfunktionen untersucht, mit deren Hilfe die Spektraldichten eines stationären Zufallsprozesses auf Grund von Beobachtungen bestimmt werden sollen, und es wurde gezeigt, daß diese Schätzfunktionen im Falle „sehr umfangreicher" Stichproben eine Normalverteilung besitzen. Im folgenden wird bewiesen, daß die Voraussetzung umfangreicher Stichproben nicht notwendig ist. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung der hier interessierenden Schätzfunktionen führt auf das Problem der Grenzverteilung von Summen von Zufallsgrößen, die im allgemeinen nicht unabhängig sind. Im Falle umfangreicher Stichproben reduziert sich diese Summe auf die Teilmenge voneinander unabhängiger Summanden, so daß dann der Zentrale Grenzwertsatz Anwendung findet. Der allgemeine Fall läßt sich nun nach einer Methode von *Loève* [3] behandeln, wobei die Gültigkeit der Normalverteilung auf Stichproben beliebigen Umfangs ausgedehnt wird.

Im Interesse der Lesbarkeit der vorliegenden Arbeit soll die allgemeine Motivierung des zu behandelnden mathematischen Problems wenn auch nur kurz skizziert werden (Teil 2). Der Beweis der Normalverteilung der untersuchten Schätzfunktionen folgt dann in Teil 3.

---

*) Aus dem Institut für Flugmechanik (Leiter: Prof. Dr. *H. Blenk*) der Deutschen Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFL), Braunschweig.

Die allgemeinen Voraussetzungen, denen der zugrunde gelegte Zufallsprozeß unterliegt, sind die folgenden: Es handelt sich um einen stationären reellen Zufallsprozeß, der auch mehrdimensional sein kann, hier jedoch aus Gründen der Einfachheit als eindimensional vorausgesetzt wird. Da dieser Prozeß nur in diskreten äquidistanten Zeitpunkten der Beobachtung unterliegen soll, so kann man ihn auch als Zufallsfolge mit ganzzahligem Parameter auffassen. Diese Folge werde mit

$$\xi_k, \; k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

bezeichnet. Von ihr wird vorausgesetzt, daß sie zentriert ist, so daß (das Symbol E bedeutet hier und im folgenden die wahrscheinlichkeitstheoretische Operation der Erwartung)

$$E\{\xi_k\} = 0$$

gilt. Es existiere ferner, als Ausdruck der Stationarität im erweiterten Sinn, das Moment zweiter Ordnung

$$E\{\xi_{k+h}\,\xi_k\}$$

als Funktion des ganzzahligen Parameters h (d. h. unabhängig von k). Darüber hinaus wird die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\, E\{\xi_{k+h}\,\xi_k\} \,|$$

gefordert, womit ein hinreichend starkes Verschwinden der Kovarianz $E\{\xi_{k+h}\,\xi_k\}$ für große Werte des Arguments h gesichert ist. Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer stetigen Leistungsdichte der Folge ξ_k. Schließlich wird noch die Normalverteilung der Folge ξ_k angenommen. Diese Annahme könnte vermutlich durch eine schwächere Forderung ersetzt werden. Wenn das hier nicht geschieht, so möge das mit dem Gewinn an Elementarität gerechtfertigt werden.

2. Das Problem der Schätzung der Leistungsdichte

2.1. Aufstellung der Schätzfunktionen

Es möge eine Beobachtung der Zufallsgrößen ξ_k an N äquidistanten Stellen des Parameters (also etwa für $k = 1, 2, \ldots, N$) vorliegen. Gesucht ist eine Schätzung der Leistungsdichte als Funktion der Frequenz. Man kann hierbei folgendermaßen vorgehen: Es werden zunächst Ausdrücke der Form

$$A_h = \frac{1}{N-h} \sum_{k=1}^{N-h} \xi_{k+h}\,\xi_k, \; h = 0, 1, \ldots, m \tag{1}$$

gebildet, wobei hier Zufallswerte mit demselben Symbol wie die entsprechenden Zufallsvariablen bezeichnet werden mögen. Die Ausdrücke (1) sind bekanntlich für $|\, h \,| \leqq m$ erwartungstreue Schätzungen der Kovarianzfunktion.

Indem man postuliert, daß die Spektraldichte linear von den A_h abhängen soll, ist bei geeigneter Wahl der Gewichtskoeffizienten $a_h^{(i)}$ ein Ausdruck der Form (in [1] mit α_i^* bezeichnet)

$$\alpha_i = \sum_{h=0}^{m} a_h^{(i)} A_h \tag{2}$$

eine Schätzfunktion der Spektraldichte an der Stelle ω_i der Kreisfrequenz ω, die ihrerseits (als dimensionslose Größe) auf den Bereich von $-\pi$ bis π beschränkt ist. Im Zusammenhang mit der Formel (1) möge bemerkt werden, daß sie sich von der entsprechenden in [1] unterscheidet: Dort wurden unabhängig vom Wert h jeweils $N - m$ Produkte summiert und durch $N - m$ dividiert. Die jetzt benutzte Form ist vorzuziehen. Die Konsequenzen, die sich hieraus speziell für die Varianz ergeben, werden bei Gelegenheit der Berechnung der Varianz in Erinnerung gebracht werden. Bildet man den Erwartungswert der Zufallsgröße α_i, so erhält man (mit $R_\xi(h)$ als Kovarianzfunktion)

$$E\{\alpha_i\} = \sum_{h=0}^{m} a_h^{(i)} R_\xi(h), \tag{3}$$

woraus sich wegen

$$R_\xi(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \omega h \, f_\xi(\omega) \, d\omega, \tag{4}$$

wo $f_\xi(\omega)$ die Spektraldichte bedeutet, die instruktive Beziehung

$$E\{\alpha_i\} = \int_{-\pi}^{\pi} P^{(i)}(\omega) \, f_\xi(\omega) \, d\omega \tag{5}$$

ergibt. Hier ist das Polynom

$$P^{(i)}(\omega) = \sum_{h=0}^{m} a_h^{(i)} \cos \omega h \tag{6}$$

die „Gewichtsfunktion", die offenbar so zu wählen ist, daß — grob gesagt — der Wert der Spektraldichte in der Umgebung des gewählten Punktes ω_i hervorgehoben und an den übrigen Stellen unterdrückt wird.

Die Schätzung (2) ist bei endlichem m nicht erwartungstreu (daß sie wegen der Beobachtung an diskreten Stellen einem weiteren Fehler unterliegt, sei hier nur angedeutet). Grundsätzlich ist festzustellen, daß die Wahl eines Gewichtskoeffizientensatzes auf zwei nicht gleichzeitig zu befriedigende Forderungen Rücksicht zu nehmen hat: die Forderung der Erwartungstreue und die Forderung der Kleinheit der mittleren Streuung. Das Ergebnis einer Schätzung, die man an einer Reihe von Stellen ω_i des Frequenzbereichs durchgeführt hat, wird aber in jedem Fall nur die Realisation einer Zufallsfunktion sein. Es ist das Studium der Eigenschaften dieser Zufallsfunktion, das der Frage nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schätzfunktion (2) ihre Bedeutung gibt.

Ein Beispiel für eine mögliche (obzwar nicht unbedingt empfehlenswerte) Gewichtsfunktion erhält man mit den Gewichtskoeffizienten

$$\begin{cases} a_0^{(i)} = \dfrac{1}{2\pi}, \\ a_h^{(i)} = \dfrac{\cos \omega_i h}{\pi}, \quad h = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \tag{7}$$

Gemäß (6) ergibt sich damit nach Ausführung der Summation die Gewichtsfunktion

$$P^{(i)}(\omega) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin \frac{2m+1}{2}(\omega - \omega_i)}{\sin \frac{\omega - \omega_i}{2}} + \frac{\sin \frac{2m+1}{2}(\omega + \omega_i)}{\sin \frac{\omega + \omega_i}{2}}\right], \tag{8}$$

deren δ-artiger Typus ersichtlich ist. Über die Mängel von (8), sowie über günstigere Alternativen finden sich Bemerkungen in [1]. Im folgenden wird angenommen, daß die Gewichtskoeffizienten gegeben sind.

2.2. Darstellung der Schätzfunktionen unter Zuhilfenahme der Spektralfunktionen des Prozesses

Eine stationäre Zufallsfolge läßt sich in der folgenden Form als stochastisches Fourier-Stieltjes-Integral darstellen:

$$\xi_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega}\, dZ(\omega). \tag{9}$$

Die komplexe Zufallsfunktion

$$Z(\omega) = U(\omega) + i\, V(\omega) \tag{10}$$

besitzt die Eigenschaft, daß ihre Zuwächse in durchschnittsfremden Intervallen unkorreliert sind: Ist also

$$\omega_1 < \omega_2 \leq \omega_3 < \omega_4,$$

so gilt

$$E\{[Z(\omega_4) - Z(\omega_3)][\overline{Z(\omega_2)} - \overline{Z(\omega_1)}]\} = 0, \tag{11}$$

wobei das Überstreichen den konjugiert-komplexen Wert bedeutet. Sodann gilt für die Varianzen der Zuwächse

$$E\{[U(\omega_2) - U(\omega_1)]^2\} = E\{[V(\omega_2) - V(\omega_1)]^2\} = \tfrac{1}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} f_\xi(\omega)\, d\omega, \tag{12}$$

die sich somit durch die integrierte Leistungsdichte ausdrücken lassen. Andererseits sind die Zuwächse von Real- und Imaginärteil von $Z(\omega)$ auch in ein und demselben Intervall unkorreliert:

$$E\{[U(\omega_2) - U(\omega_1)][V(\omega_2) - V(\omega_1)]\} = 0. \tag{13}$$

Aus dem linearen Zusammenhang, der zwischen ξ_k und $Z(\omega)$ besteht, folgert man, daß auch die Zufallsfunktion $Z(\omega)$ normal verteilt sein wird, wenn das von ξ_k gilt.

Nun läßt sich die Schätzfunktion α_i, wie das wohl zuerst von *Goodman* [2] angegeben worden ist, als stochastisches Doppelintegral über die Spektralfunktion $Z(\omega)$ darstellen. Diese „Übertragung in den Frequenzbereich" erweist sich kraft der Eigenschaften (11), (12) und (13) als entscheidender Schritt auf dem Wege zu einem tieferen Verständnis der probabilistischen Struktur der Schätzfunktionen.

Führt man (9) in (1) und damit in (2) ein, so ergibt sich nach Ausführung der Summation über k

$$\alpha_i = \sum_{h=0}^{m} a_h^{(i)} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega_1 h} \frac{\sin\frac{N-h}{2}(\omega_1-\omega_2)}{(N-h)\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}} \times \tag{14}$$

$$\times \left[\cos\frac{N-h+1}{2}(\omega_1-\omega_2) + i\sin\frac{N-h+1}{2}(\omega_1-\omega_2)\right] \mathrm{d}Z(\omega_1)\, \overline{\mathrm{d}Z(\omega_2)}$$

oder nach einigen Umformungen (siehe [1]), deren Zweck es ist, der Beziehung (14) eine für das Weitere geeignetere Form zu geben:

$$\alpha_i = 4\sum_{h=0}^{m} a_h^{(i)} \iint_{\nabla} \cos\frac{h}{2}(\omega_1+\omega_2) \frac{\sin\frac{N-h}{2}(\omega_1-\omega_2)}{(N-h)\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}} \times$$

$$\times \left\{\cos\frac{N+1}{2}(\omega_1-\omega_2)\left[\mathrm{d}U(\omega_1)\,\mathrm{d}U(\omega_2) + \mathrm{d}V(\omega_1)\,\mathrm{d}V(\omega_2)\right] + \right. \tag{15}$$

$$\left. + \sin\frac{N+1}{2}(\omega_1-\omega_2)\left[\mathrm{d}U(\omega_1)\,\mathrm{d}V(\omega_2) - \mathrm{d}V(\omega_1)\,\mathrm{d}U(\omega_2)\right]\right\}.$$

Hier bedeutet das Zeichen ∇ unter dem Doppelintegral, daß die Integration über das in Bild 1 schraffierte Gebiet zu erstrecken ist.

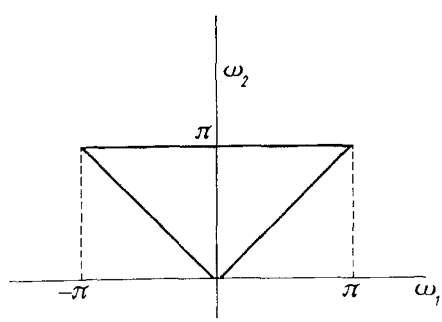

Abb. 1

2.3. Darstellung der Schätzfunktion als Limes einer Summe von Zufallsgrößen

Die stochastischen Stieltjes-Integrale in (15) sind als Grenzwert Riemannscher Summen definiert, wobei (woran hier erinnert werden möge) die Konvergenz dieser Summen stochastischer Summanden als eine Konvergenz im quadratischen Mittel zu verstehen ist. Die dafür notwendige und hinreichende Bedingung ist die Existenz einer Kovarianz endlicher Schwankung des stochastischen Anteils (und die Integrierbarkeit des nicht-stochastischen Anteils). Diese Bedingungen sind hier erfüllt.

Es ist zweckmäßig, die Riemannschen Summen für die zentrierte Schätzfunktion

$$\alpha_i - E\{\alpha_i\}$$

anzusetzen, was dadurch erreicht wird, daß die Intervalle

$$\omega_{k-1} \leqq \omega_1 \leqq \omega_k ,$$

$$\omega_{l-1} \leqq \omega_2 \leqq \omega_l$$

eines jeden Produkts von Zuwächsen, wie z. B. des Produkts

$$[U(\omega_k) - U(\omega_{k-1})]\,[U(\omega_l) - U(\omega_{l-1})] \equiv \Delta U(k)\, \Delta U(l) ,$$

das in den Riemann-Stieltjesschen Summen auftritt, für alle vorkommenden Werte von k und l durchschnittsfremd bleiben, so daß sein Erwartungswert gemäß (11) Null ist.

Man unterteilt die Strecken von 0 bis π auf den Achsen ω_1 und ω_2 in n, der Einfachheit halber gleiche Intervalle, so daß

$$\omega_k = \frac{\pi k}{n}, \quad \omega_l = \frac{\pi l}{n}, \quad k, l = 0, 1, \ldots, n . \tag{16}$$

äquidistante Punkte auf der ω_1-Achse, bzw. der ω_2-Achse bedeuten. Mit $\tilde{\omega}_k$ und $\tilde{\omega}_l$ mögen beliebige Punkte innerhalb der Intervalle bezeichnet werden, also

$$\omega_{k-1} \leqq \tilde{\omega}_k \leqq \omega_k ,$$

$$\omega_{l-1} \leqq \tilde{\omega}_l \leqq \omega_l .$$

Führt man noch die Abkürzungen

$$g_c(\omega_1, \omega_2) = 4 \sum_{h=0}^{m} a_h^{(i)} \cos\frac{h}{2}(\omega_1+\omega_2) \frac{\sin\frac{N-h}{2}(\omega_1-\omega_2)}{(N-h)\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}} \cos\frac{N+1}{2}(\omega_1-\omega_2) \tag{17}$$

$$g_s(\omega_1, \omega_2) = 4 \sum_{h=0}^{m} a_h^{(i)} \cos\frac{h}{2}(\omega_1+\omega_2) \frac{\sin\frac{N-h}{2}(\omega_1-\omega_2)}{(N-h)\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}} \sin\frac{N+1}{2}(\omega_1-\omega_2) \tag{18}$$

ein, so ergibt sich die folgende Darstellung:

$$\alpha_l - E\{\alpha_i\} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \{[g_c(\tilde{\omega}_k, \tilde{\omega}_l) + g_c(-\tilde{\omega}_k, \tilde{\omega}_l)] \times \tag{19}$$

$$\times \Delta U(k) \Delta U(l) + [g_c(\tilde{\omega}_k, \tilde{\omega}_l) - g_c(-\tilde{\omega}_k, \tilde{\omega}_l)] \Delta V(k) \Delta V(l) +$$

$$+ [g_s(\tilde{\omega}_k, \tilde{\omega}_l) + g_s(-\tilde{\omega}_k, \tilde{\omega}_l)] \Delta U(k) \Delta V(l) -$$

$$- [g_s(\tilde{\omega}_k, \tilde{\omega}_l) - g_s(-\tilde{\omega}_k, \tilde{\omega}_l)] \Delta V(k) \Delta U(l)\} .$$

Der lineare Zusammenhang zwischen den Zuwächsen auf der positiven und der negativen Seite der Achse ω_1 ist hier (unter Beachtung des geraden bzw. des ungeraden Verhaltens der Zuwächse ΔU und ΔV) benutzt worden, um die Zählung von k nur über positive Werte zu erstrecken. Die Bedingung $l > k$ ist, wie man sieht, ebenfalls erfüllt. Das Integrationsgebiet nähert sich in der Grenze $n \to \infty$ von innen her der Diagonale $\omega_1 = \omega_2$, ohne sie je zu erreichen.

3. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schätzfunktionen

3.1. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung unter der Annahme der Unabhängigkeit der Summanden

Es läßt sich sehr einfach zeigen, daß die Grenzverteilung der Summe (19), d. h. die Verteilung im Fall $n \to \infty$, die Normalverteilung ist, wenn die Voraussetzung gemacht wird, daß die Summanden stochastisch unabhängig sind. Obwohl diese Voraussetzung nicht zutrifft, wird das Ergebnis nützlich sein, weil es ein Verteilungsgesetz liefert, mit dem das Gesetz der wirklichen Summe (19) entsprechend der Methode von *Loève* verglichen werden kann.

Läßt man in der Summe (19) zunächst die von den Funktionen g_c und g_s gebildeten Faktoren außer acht und betrachtet man die Zufallsgrößen, die zur Abkürzung mit ζ_{kl} bezeichnet werden mögen, so daß etwa im Fall der ersten der vier Teilsummen, in die die rechte Seite von (19) zerfällt,

$$\zeta_{kl} = \Delta U(k) \Delta U(l) \tag{20}$$

ist, so kann man ihre Verteilungsdichte unschwer angeben, insofern als sie das Produkt zweier nicht-korrelierter, normal verteilter und zentrierter Zufallsgrößen ist, deren Varianzen nach (12) durch

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_k^2 &= \frac{1}{2} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} f_\xi(\omega) \, d\omega , \\ \sigma_l^2 &= \frac{1}{2} \int_{\omega_{l-1}}^{\omega_l} f_\xi(\omega) \, d\omega \end{aligned} \right. \tag{21}$$

gegeben sind. Die Verteilungsdichte des Produkts (20) ergibt sich zu

$$f(z_{kl}) = \frac{1}{\pi\,\sigma_k\,\sigma_l}\,K_0\left(\frac{|z_{kl}|}{\sigma_k\,\sigma_l}\right), \tag{22}$$

wo $K_0(\ldots)$ die modifizierte Hankelsche Funktion nullter Ordnung bedeutet. Die der Dichte (22) entsprechende charakteristische Funktion wird

$$\varphi_{kl}(\Theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\Theta\,z_{kl}}\,f(z_{kl})\,dz_{kl} = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma_k^2\,\sigma_l^2\,\Theta^2}}\,. \tag{23}$$

Die charakteristische Funktion der ersten Teilsumme von (19) ist unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit der Summanden, worauf der Stern in (24) deuten soll, das Produkt der charakteristischen Funktionen (23) sämtlicher Summanden, wobei jetzt die Faktoren, mit denen die Zufallsgrößen in der Summe (19) multipliziert sind, berücksichtigt sind:

$$\varphi_n^*(\Theta) = \prod_{k,l} \frac{1}{\sqrt{1+\sigma_k^2\,\sigma_l^2[g_c(\tilde\omega_k,\tilde\omega_l)+g_c(-\tilde\omega_k,\tilde\omega_l)]^2\,\Theta^2}}\,. \tag{24}$$

Nimmt man den Logarithmus von (24), so wird

$$\log\varphi_n^* = -\frac{1}{2}\sum_{k,l}\log\{1+\sigma_k^2\,\sigma_l^2\,[g_c(\tilde\omega_k,\tilde\omega_l)+g_c(-\tilde\omega_k,\omega_l)]^2\,\Theta^2\}, \tag{25}$$

wo rechts jetzt eine Summe steht, die genau wie in (19) definiert ist. Wie die Beziehungen (21) zeigen, werden $\sigma_k{}^2$ und $\sigma_l{}^2$ für große Werte n von der Ordnung $O(1/n)$ klein. Da die Anzahl der Summanden in (25) mit n quadratisch wächst (genauer wie $n(n-1)/2$), so ergibt sich, indem man jeden Logarithmus auf der rechten Seite von (25) entwickelt und die Terme nach Potenzen von Θ ordnet,

$$\log\varphi_n^* = -\frac{1}{2}\sum_{k,l}\sigma_k^2\,\sigma_l^2\,[g_c(\tilde\omega_k,\tilde\omega_l)+g_c(-\tilde\omega_k,\tilde\omega_l)]^2\,\Theta^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\Theta^4 + \ldots, \tag{26}$$

womit die Normalverteilung im Limes $n\to\infty$ schon bewiesen ist. Die Gesamtvarianz der vier nicht korrelierten Teilsummen von (19), die sich nur durch ihre Faktoren unterscheiden, wird dann nach einigen Umformungen durch die folgende Formel gegeben:

$$\sigma_x^2 = 16\sum_{g=0}^{m} a_g^{(i)}\sum_{h=0}^{m} a_h^{(i)}\int\limits_0^{\pi}\cos g\,\omega'\cos h\,\omega' \times \tag{27}$$

$$\times\int\limits_0^{\pi-\omega'}\frac{\sin(N-g)\,\omega''\sin(N-h)\,\omega''}{(N-g)(N-h)\sin^2\omega''}\,f_\xi(\omega'-\omega'')\,f_\xi(\omega'+\omega'')\,d\omega''\,d\omega'\,.$$

Die Varianz (27) gilt zunächst nur unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit der Summanden von (19). Es wird sich jedoch zeigen, daß sie auch im Falle abhängiger Summanden ihre Geltung behält. Es möge daher schon an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß als Konsequenz des gegenüber [1] verschiedenen Ansatzes (1) die Varianz (27) sich von der in [1] gegebenen Formel geringfügig unterscheidet.

3.2. Das Vergleichskriterium der Verteilungsgrenze und der allgemeine Beweisgang im Fall abhängiger Summanden

Wird die Abhängigkeit der Summanden der Summe (19) nicht unterdrückt, wie das im vorangehenden Abschnitt gemacht worden ist, so besteht nicht mehr die einfache Regel, daß die charakteristische Funktion der Summe gleich dem Produkt der charakteristischen Funktionen der Summanden ist. Der elementare Weg zur charakteristischen Funktion der Summe ist also nicht mehr zulässig. Nun läßt sich aber in vielen Fällen zeigen, daß die charakteristische Funktion einer Summe abhängiger Summanden sich asymptotisch mit $n \to \infty$ einer gegebenen charakteristischen Funktion nähert. Ist speziell $\varphi_n(\Theta)$ die charakteristische Funktion einer der Teilsummen von (19), während $\varphi_n^*(\Theta)$ entsprechend (24) als gegeben zu verstehen ist, so ist die Bedingung

$$\varphi_n(\Theta) - \varphi_n^*(\Theta) \to 0 \text{ für } n \to \infty \tag{28}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß das gesuchte Verteilungsgesetz mit dem bekannten Verteilungsgesetz asymptotisch übereinstimmt. Da nun φ_n^* mit $n \to \infty$ die charakteristische Funktion einer Normalverteilung wird, so wäre mit (28) auch die Normalverteilung im Fall abhängiger Summanden erwiesen.

Der Beweis der Gültigkeit der asymptotischen Beziehung (28) erfolgt nach *Loève* ([3], Seite 375—377) in mehreren Schritten, die hier zunächst in allgemeiner Weise beschrieben werden sollen. Der erste Schritt besteht in der Herleitung der Ungleichung

$$|\varphi_n - \varphi_n^*| \leqq \sum E\{|\varphi'_{kl} - \varphi_{kl}^{*\prime}|\}, \tag{29}$$

wo die Funktionen $\varphi'_{kl}(\Theta)$ und $\varphi_{kl}^{*\prime}(\Theta)$ gewisse, in den folgenden Abschnitten erklärte, bedingte charakteristische Funktionen der einzelnen Summanden sind. Die Beziehung (29) gestattet somit eine summandenweise Abschätzung. Der zweite Schritt führt dann die summandenweise Abschätzung mit Hilfe von Momenten durch, wie das jetzt gezeigt werden soll.

Bedeutet $f'(z_{kl})$ eine bedingte Verteilungsdichte (sie wird weiter unten erklärt werden), so kann der Betrag der Differenz der (bedingten) charakteristischen Funktionen auf der rechten Seite von (29) auch in der Form

$$|\varphi'_{kl} - \varphi_{kl}^{*\prime}| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta z_{kl}} - f^{*\prime}(z_{kl})\,[f'(z_{kl})]\,dz_{kl}\right| = \tag{30}$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\Theta z_{kl}} - 1)\,[f'(z_{kl}) - f^{*\prime}(z_{kl})]\,dz_{kl}\right|$$

geschrieben werden. Nun gilt, wenn x eine nicht-negative reelle Zahl bedeutet, die Abschätzung

$$\left| e^{ix} - 1 - i\,x - \frac{(i\,x)^2}{2} \right| \leqq c_\delta\, x^{2+\delta} \text{mit } 0 < \delta \leqq 1\,, \tag{31}$$

wobei c_δ eine nur vom Wert δ abhängende Konstante ist. Aus (31) gewinnt man auf Grund der Tatsache, daß der Betrag der Differenz zweier komplexer Zahlen größer ist als die positiv genommene Differenz ihrer Beträge, die Beziehung

$$|\, e^{ix} - 1 \,| \leqq x + \frac{x^2}{2} + c_\delta\, x^{2+\delta}\,, \tag{32}$$

mit deren Hilfe (30) durch die folgende Abschätzung ersetzt werden kann:

$$\begin{aligned} |\, \varphi'_{kl} - \varphi^{*\prime}_{kl} \,| \leq |\, \Theta \,|\, \left| \int_{-\infty}^{\infty} z_{kl}\, [f'(z_{kl}) - f^{*\prime}(z_{kl})]\, \mathrm{d}z_{kl} \right| + \\ + \frac{\Theta^2}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} z_{kl}^2\, [f'(z_{kl}) - f^{*\prime}(z_{kl})]\, \mathrm{d}z_{kl} \right| + \\ + c_\delta\, |\, \Theta \,|^{2+\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |z_{kl}\,|^{2+\delta}\, |\, f'(z_{kl}) - f^{*\prime}(z_{kl}) \,|\, \mathrm{d}z_{kl}\,, \end{aligned} \tag{33}$$

so daß die Ungleichung (29) nunmehr wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} |\, \varphi_n - \varphi_n^* \,| \leq |\, \Theta \,| \sum_{kl} E\, \left| \int_{-\infty}^{\infty} z_{kl}\, [f'(z_{kl}) - f^{*\prime}(z_{kl})]\, \mathrm{d}z_{kl} \right| + \\ + \frac{\Theta^2}{2} \sum_{kl} E\, \left| \int_{-\infty}^{\infty} z_{kl}^2\, [f'(z_{kl}) - f^{*\prime}(z_{kl})]\, \mathrm{d}z_{kl} \right| + \\ + c_\delta\, |\, \Theta \,|^{2+\delta} \sum_{kl} E \int_{-\infty}^{\infty} |\, z_{kl}\,|^{2+\delta}\, |\, f'(z_{kl}) - f^{*\prime}(z_{kl}) \,|\, \mathrm{d}z_{kl}\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Wie man sieht, handelt es sich hier um Summen von Momenten der Ordnungen 1, 2 und $2 + \delta$ ($0 < \delta \leqq 1$).

In den folgenden Abschnitten wird der genaue Sinn der hier benutzten Begriffe der „bedingten“ Summanden erläutert werden, und es wird anschließend gezeigt, daß die rechte Seite von (34) im Limes $n \to \infty$ gegen Null geht, so daß das Vergleichskriterium der Verteilungsgesetze erfüllt ist, und die Normalverteilung der Teilsummen von (19) (und der Summe dieser vier Teilsummen) damit bewiesen.

3.3. Einführung bedingter Summanden

Jede einzelne der vier Teilsummen von (19) hat, wenn man hier von den nichtstochastischen Faktoren absieht, die Form

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \zeta_{kl} .$$

Indem man eine Ordnung einführt, kann man diese Doppelsumme auch als einfache Summe schreiben, nämlich als

$$\sum_{j=1}^{j_n} \zeta_j ,$$

wobei der Index j von 1 bis $j_n = n(n-1)/2$ läuft, und zwar so, wie das in Bild 2 angedeutet ist. Neben den abhängigen Zufallsgrößen ζ_j betrachtet man die Zufallsgrößen ζ_j^*, die definitionsgemäß untereinander und von den ζ_j unabhängig sind, als einzeln betrachtete Zufallsgrößen jedoch dieselbe Verteilung haben wie die ζ_j.

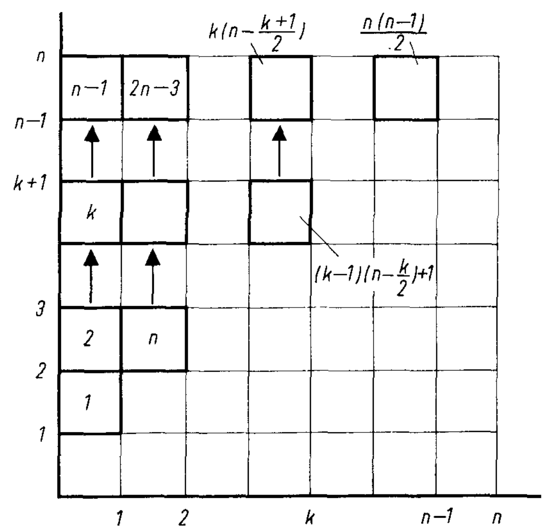

Abb. 2

Es werde nun der Vektor

$$Z_j = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{j-1}, \zeta_{j+1}^*, \ldots, \zeta_{jn}^*) \tag{35}$$

eingeführt, dessen Komponenten teils durch die abhängigen, teils durch die hier eingeführten unabhängigen Zufallsgrößen gebildet werden.

Im Sinne von Vektorsummen gilt dann

$$\left\{\begin{array}{l} Z_2 - Z_1 = \zeta_1 - \zeta_2{}^*, \\ Z_3 - Z_2 = \zeta_2 - \zeta_3{}^*, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ Z_{j_n} - Z_{j_n-1} = \zeta_{j_n-1} - \zeta_{j_n}{}^*, \end{array}\right. \tag{36}$$

woraus sich die beiden, ebenfalls im Sinne von Vektorsummen zu verstehenden Beziehungen

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{j_n} \zeta_j = Z_{j_n} + \zeta_{j_n}, \\ \sum\limits_{j=1}^{j_n} \zeta_j{}^* = Z_1 + \zeta_1{}^* \end{array}\right. \tag{37}$$

ergeben. Ist nun

$$\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{j_n}) \tag{38}$$

ein Vektor, dessen Komponenten den Komponenten ζ_j (bzw. ζ_j^*) entsprechen, und bedeutet $\circledast$ das skalare Produkt, so gewinnt man aus (37) die Identität

$$e^{i\Theta\circledast\sum_1^{j_n}\zeta_j} - e^{i\Theta\circledast\sum_1^{j_n}\zeta_j^*} = e^{i\Theta\circledast Z_{j_n} + i\Theta\circledast\zeta_{j_n}} - e^{i\Theta\circledast Z_1 + i\Theta\circledast\zeta_1^*} \tag{39}$$

Aus den Beziehungen (36) ergeben sich die Identitäten

$$\left\{\begin{array}{l} e^{i\Theta\circledast(Z_1 + \xi_1)} - e^{i\Theta\circledast(Z_2 + \xi_2^*)} = 0, \\ e^{i\Theta\circledast(Z_2 + \xi_2)} - e^{i\Theta\circledast(Z_3 + \xi_3^*)} = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right. \tag{40}$$

Addiert man sie zur rechten Seite von (39), so ergibt sich

$$e^{i\Theta\circledast\sum_1^{j_n}\zeta_j} - e^{i\Theta\circledast\sum_1^{j_n}\zeta_j^*} = \sum_{j=1}^{j_n}\left(e^{i\Theta_j\zeta_j} - e^{i\Theta_j\zeta_j^*}\right) e^{i\Theta\circledast Z_j}. \tag{41}$$

Indem man die Erwartungsoperation auf die Identität (41) anwendet, erhält man für die Absolutbeträge

$$\left| E\left\{e^{i\Theta\circledast\sum_1^{j_n}\zeta_j} - e^{i\Theta\circledast\sum_1^{j_n}\zeta_j^*}\right\}\right| = \left| E\left\{\sum_{j=1}^{j_n}\left[e^{i\Theta_j\zeta_j} - e^{i\Theta_j\zeta_j^*}\right] e^{i\Theta\circledast Z_j}\right\}\right| \tag{42}$$

oder schließlich auch, indem man die Erwartung summandenweise anwendet,

$$\left| E \left\{ e^{i\,\Theta * \sum_1^{j_n} \zeta_j} - e^{i\,\Theta * \sum_1^{j_n} \zeta_j^*} \right\} \right| \leqq \sum_{j=1}^{j_n} \left| E \left\{ \left[e^{i\,\Theta_j \zeta_j} - e^{i\,\Theta_j \zeta_j^*} \right] e^{i\,\Theta * Z_j} \right\} \right| . \tag{43}$$

Bisher hat es sich um Identitäten gehandelt (der Übergang von (42) zu (43) erforderte allerdings einen Satz über die Erwartung von Summen). Von nun an wird ein entscheidender neuer Gesichtspunkt eingeführt, indem die Zufallsgrößen ζ_j (und ζ_j^*) als bedingte Zufallsgrößen unter der Bedingung, daß Z_j gegeben ist, betrachtet werden. Die Berechtigung hierzu leuchtet intuitiv ein (tiefere Argumente finden sich auf Seite 337ff. in [3]). Nun ist die bedingte Verteilungsdichte (bisher mit f' bezeichnet) allgemein durch die Beziehung

$$f\,(z_j \mid Z_j) = \frac{f\,(z_j, Z_j)}{f\,(Z_j)} \tag{44}$$

gegeben, wo die Benutzung desselben Symbols f für drei verschiedene Funktionen gestattet sein möge. Der Zähler auf der rechten Seite von (44) bedeutet die gemeinsame Verteilung von z_j und der Komponenten von Z_j, der Nenner bedeutet die gemeinsame Verteilung der Komponenten des Vektors Z_j.

Offenbar lautet jetzt die bedingte charakteristische Funktion

$$\varphi_j'\,(\Theta_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\Theta_j z_j} f\,(z_j \mid Z_j)\,dz_j\,. \tag{45}$$

Sie ist wegen ihrer Abhängigkeit von Z_j eine Zufallsgröße.

Indem man den Faktor $e^{i\,\Theta * Z_j}$ jedes einzelnen Summanden auf der rechten Seite von (43) durch seinen maximalen Betrag, nämlich den Wert 1, ersetzt und die Komponenten Θ_j des Vektors Θ sämtlich gleich dem Skalar Θ setzt (dieselbe Bezeichnung für Vektor und Skalar sei entschuldigt), ergibt sich aus (43)

$$\left| \varphi_n\,(\Theta) - \varphi_n^*\,(\Theta) \right| \leqq \sum_{j=1}^{j_n} E \left\{ \left| \varphi_j'\,(\Theta) - \varphi_j^{*\prime}\,(\Theta) \right| \right\}. \tag{46}$$

Diese Ungleichung ist mit (29) identisch. Die mit einem Stern versehene charakteristische Funktion ist selbstverständlich nur formal als eine bedingte charakteristische Funktion aufzufassen. Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsgrößen ζ_j^* untereinander und von sämtlichen ζ_j ist

$$f\,(z_j^* \mid Z_j) = f\,(z_j^*)\,, \tag{47}$$

so daß $\varphi_j^{*\prime}$ auch keine Zufallsgröße ist.

3.4. Berechnung der benötigten Verteilungsdichten

Die in der Ungleichung (34) auftretenden Erwartungen von Momenten sind sämtlich von der Art

$$E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} z_{kl}^{\nu} f'(z_{kl})\, \mathrm{d}z_{kl}\right\}$$

oder, indem man die bedingte Verteilungsdichte f' nach (44) einsetzt und die Operation der Erwartung als Integral schreibt,

$$E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} z_{kl}^{\nu} \frac{f(z_{kl}, Z_{kl})}{f(Z_{kl})} = \mathrm{d}z_{kl}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} z_{kl}^{\nu} f(z_{kl}, Z_{kl})\, \mathrm{d}z_{kl}\, \mathrm{d}Z_{kl}\,, \qquad (48)$$

wobei hier das Zeichen $\mathrm{d}Z_{kl}$ symbolisch für das Produkt der Differentiale sämtlicher Komponenten des Vektors Z_{kl} steht. Gl. (48) zeigt somit, daß man zur Berechnung der rechten Seite von (34) nur die gemeinsamen Verteilungsdichten von ζ_{kl} und Z_{kl} braucht. Diese Dichten lassen sich, wie nunmehr gezeigt werden wird, in geschlossener Form angeben.

Es ist klar, daß ζ_{kl} nur von den Komponenten des Vektors Z_{kl} abhängen wird, die innerhalb der nach dem Index j fortschreitenden Zählung der Stelle $k\,l$ vorausgehen. Die Berechnung der gemeinsamen Verteilungsdichte erfolgt durch Transformation aus der gemeinsamen Normalverteilung der die Größen

$$z_{kl} = x_k y_l$$

bildenden Faktoren (x_k der erste, y_l der zweite Faktor) für sämtliche in Frage kommende Werte k und l.

Es zeigt sich, daß es dabei zwei verschiedene Fälle gibt, nämlich erstens den Fall $k = 1$ und zweitens den Fall $k \geqq 2$.

Im ersten Fall lautet offenbar die Dichte der gemeinsamen Verteilung der l Größen $x_{k'}$ und $y_{l'}$ ($k' = 1, l' = 2, 3, \ldots, l$)

$$\frac{1}{(2\,\pi)^{l/2}\, \sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_l} \exp\left[-\frac{x_1^2}{2\,\sigma_1^2} - \frac{y_2^2}{2\,\sigma_2^2} - \ldots - \frac{y_l^2}{2\,\sigma_l^2}\right].$$

Indem man die y_l' mit Hilfe von

$$y_{l'} = \frac{z_{1l'}}{x_1}\,, \quad l' = 2, \ldots, l$$

eliminiert, ergibt sich für die gemeinsame Dichte von ζ_{1l} und von denjenigen Komponenten des Vektors Z_{1l}, die dem Element $1, l$ vorausgehen,

$$f(z_{1l}, Z_{1l}) = \frac{1}{(2\pi)^{l/2}\,\sigma_1\ldots\sigma_l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}-\frac{1}{2x_1^2}\sum_{l'=2}^{l}\frac{z_{1l'}^2}{\sigma_{l'}^2}\right]\frac{dx_1}{|x_1|^{l-1}} =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^{l/2}\,\sigma_1\ldots\sigma_l}\;\frac{K_{\frac{l-2}{2}}\left(\sqrt{\sum\limits_2^l \frac{z_{1l'}^2}{\sigma_1^2\,\sigma_{l'}^2}}\right)}{\left[\sigma_1^2\sum\limits_2^l\frac{z_{1l'}^2}{\sigma_{l'}^2}\right]^{\frac{l-2}{4}}}, \tag{49}$$

wo K_ν die modifizierte Hankelsche Funktion der Ordnung ν bedeutet. Im Zusammenhang mit dieser Formel sei noch die Bemerkung gemacht, daß sie unmittelbar die Tatsache der Abhängigkeit der Zufallsgrößen $\zeta_{1l'}$ zeigt, insofern als die gemeinsame Dichte nicht in ein Produkt der Dichten jeder einzelnen Zufallsgröße zerfällt. Auch im asymptotischen Fall trifft das nicht zu.

Ist nun $k \geqq 2$ (und $l > k+1$), so läßt sich die Normalverteilungsdichte der $n+k-1$ Größen

$$x_1, x_2, \ldots, x_k,$$

$$y_2, y_3, \ldots, y_n$$

nicht mehr auf die

$$(k-1)\left(n-\frac{k}{2}\right)+l-k$$

Größen $z_{k'l'}$, die der Stelle $k\,l$ vorausgehen, transformieren. In der Tat besteht dann die Beziehung

$$z_{k'l'} = \frac{z_{k',\,l'-1}\,z_{k'-1,\,l'}}{z_{k'-1,\,l'-1}}, \tag{50}$$

aus der hervorgeht, daß die Kenntnis etwa des Zählers der rechten Seite von (50) sowie der linken Seite den Wert des Nenners bestimmt, so daß seine Angabe nicht erforderlich ist. Man könnte sagen, daß es sich hier um eine „Markovsche Eigenschaft" handelt, indem die Kenntnis der nicht-schraffierten Elemente in Bild 3 die Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße ζ_{kl} unbeeinflußt läßt.

Bezeichnet man die $n+k-3$ Elemente, von denen die bedingte Verteilung von ζ_{kl} abhängt, mit $\widetilde{Z}_{kl}$, so berechnet sich die gemeinsame Verteilung von ζ_{kl} und $\widetilde{Z}_{kl}$ aus der gegebenen Normalverteilung der sie bildenden Faktoren, deren Anzahl, wie schon festgestellt wurde, $n+k-1$ beträgt. Sie werden auf

$$n+k-3+1 = n+k-2$$

Produkte $z_{k'l'}$ transformiert, so daß wiederum eine Variable (etwa x_k) verfügbar bleibt.

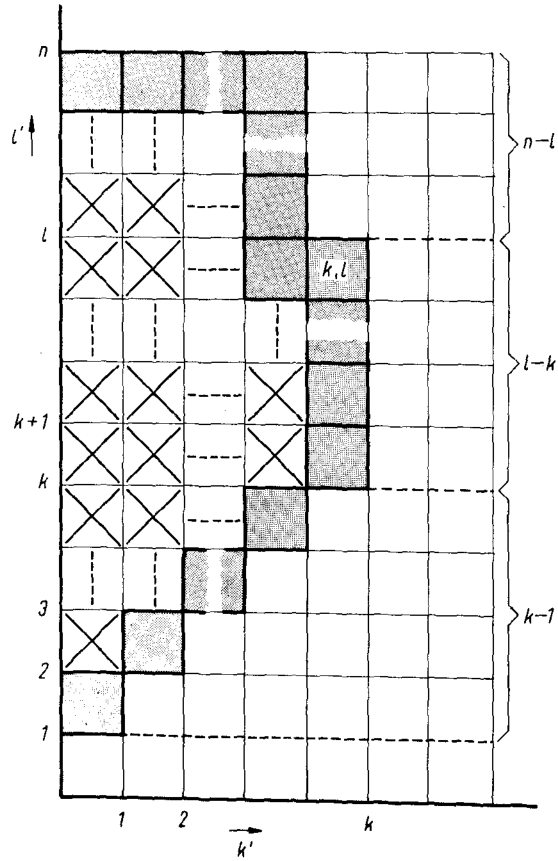

Abb. 3

Die Funktionaledeterminante der Umkehrtransformation lautet jetzt

$$D_{kl} = \left(\frac{z_{kl}}{z_{k-1,\,l}}\right)^{n-l} \frac{z_{k-1,\,n}}{z_{k-1,\,l}} \, \frac{1}{x_k{}^{n-k}} \prod_{k'=1}^{k-1} \frac{1}{z_{k'n}}\,, \tag{51}$$

und die gemeinsame Verteilungsdichte von ζ_{kl} und $\widetilde{Z}_{kl}$ wird

$$f\,(z_{kl}, \widetilde{Z}_{kl}) = \frac{2\left|\left(\dfrac{z_{kl}}{z_{k-1,\,l}}\right)^{n-l} \dfrac{z_{k-1,\,n}}{z_{k-1,\,l}} \displaystyle\prod_{k'=1}^{k-1} \dfrac{1}{z_{k'n}}\right|}{(2\,\pi)^{\frac{n+k-1}{2}} \displaystyle\prod_{1}^{k} \sigma_{k'} \prod_{2}^{n} \sigma_{l'}} \left[\frac{A}{B}\right]^{\frac{n-k-1}{4}} K_{\frac{n-k-1}{2}}\left(\sqrt{A\,B}\right) \tag{52}$$

mit

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sigma_k^2} + \left[\frac{z_{k-1,l}}{z_{kl}\, z_{k-1,l}}\right]^2 \sum_{k'=1}^{k-1} \frac{z_{k'n}^2}{\sigma_{k'}^2}, \\
B &= \left[\frac{z_{kl}\, z_{n-1,l}}{z_{k-1,l}}\right]^2 \sum_{l'=2}^{n} \frac{z_{l'-1,l'}^2}{z_{l'-1,n}^2\, \sigma_{l'}^2} + \sum_{k_1'}^{l} \frac{z_{kl'}^2}{\sigma_{l'}^2} + \left[\frac{z_{kl}}{z_{k-1,l}}\right]_2 \sum_{=k+1}^{n} \frac{z_{k-1,l'}}{\sigma_{l'}^2}.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Auch hier ist eine Bemerkung über die Abhängigkeit der Zufallsgrößen, wie das im Anschluß an Formel (49) geschehen ist, anzubringen.

3.5. Nachweis der Gültigkeit des asymptotischen Vergleichskriteriums

Der Nachweis der Gültigkeit der asymptotischen Beziehung (28) durch Berechnung der Erwartungen der Momente ist jetzt dank der Kenntnis der erforderlichen gemeinsamen Verteilungsdichten (49) und (52) ohne weiteres möglich. Die Einzelheiten dieser Routinerechnung, die zwar umständlich, aber trotzdem in geschlossener Form durchführbar ist, sollen hier unterdrückt werden. Nur die Ergebnisse mögen im folgenden zusammengestellt werden:

(1) Wie man übrigens unmittelbar sieht, sind die Dichtefunktionen (49) und (52) gerade Funktionen ihrer Argumente. Die Momente erster Ordnung verschwinden daher identisch. Dasselbe gilt natürlich auch für das Moment erster Ordnung der unabhängigen Zufallsgröße ζ_{kl}^*.

(2) Die Erwartung des Moments der Ordnung $2 + \delta$ lautet

$$\frac{4}{\pi}\, 2^\delta\, \Gamma^2\left(\frac{3+\delta}{2}\right) (\sigma_k\, \sigma_l)^{2+\delta}\,. \tag{54}$$

Nun ist

$$\sigma_k\, \sigma_l \sim O\left(\frac{1}{n}\right),$$

so daß man die Beziehung

$$\sum_{kl} E \int_{-\infty}^{\infty} |\, z_{kl}\,|^{2+\delta} f'\,(z_{kl})\, \mathrm{d}z_{kl} \sim O\left(\frac{1}{n^\delta}\right) \tag{55}$$

erhält. Da $\delta > 0$ ist, so verschwindet dieser Term mit $n \to \infty$. Dasselbe gilt für die unabhängigen Größen.

(3) Die Erwartung des bedingten Moments 2. Ordnung ergibt sich zu

$$(\sigma_k\, \sigma_l)^2\,, \tag{56}$$

was formal wiederum mit dem Moment 2. Ordnung der unabhängigen Zufallsgröße übereinstimmt. Die Differenz beider verschwindet. Sie verschwindet asymptotisch mit $n \to \infty$, falls man im Sinne mathematischer Korrektheit die Möglichkeit voneinander abweichender Einteilungen in Riemannsche Summanden bei den unabhängigen und den abhängigen Summanden zuläßt.

Die rechte Seite von (34) geht also asymptotisch gegen Null. Damit ist die Normalverteilung einer jeden der vier Teilsummen von (19) und auch die Normalverteilung ihrer Summe bewiesen. Die Varianz von α_i stimmt mit dem Ausdruck (27) überein. Bemerkt sei, daß die Kovarianz zwischen einer Schätzung α_i und einer Schätzung α_j ($j \neq i$) durch die Formel

$$\operatorname{Cov}\{\alpha_i \alpha_j\} = 16 \sum_{g=0}^{m} a_g^{(i)} \sum_{h=0}^{m} a_h^{(i)} \int_0^{\pi} \cos g\,\omega' \cos h\,\omega' \times \tag{57}$$

$$\times \int_0^{\pi-\omega'} \frac{\sin (N-g)\,\omega'' \sin (N-h)\,\omega''}{(N-g)\,(N-h)\sin^2 \omega''} f(\omega' - \omega'')\, f(\omega' + \omega'')\, d\omega''\, d\omega'$$

gegeben ist.

4. Zusammenfassung

Angesichts der großen Erfolge auf dem Gebiet der Theorie stochastischer Vorgänge im Verlauf der letzten 20 Jahre ist es nicht verwunderlich, daß auch die „inverse Aufgabe", nämlich die Ermittlung der probabilistischen Charakteristiken dieser Vorgänge aus Beobachtungen an zufälligen Stichproben, wichtig geworden ist. Derartige statistische Fragestellungen, deren Bedeutung für die Ingenieurwissenschaften nicht betont zu werden braucht, sind jedoch noch wenig behandelt worden, was wohl hauptsächlich damit zusammenhängt, daß die klassische Statistik zur Schätzung von Funktionen im allgemeinen nicht taugt. Die vorliegende Arbeit unternimmt den Versuch, zur Klärung wenigstens einer Teilaufgabe etwas beizutragen. Es wird gezeigt, daß gewisse Schätzfunktionen, mit deren Hilfe empirische Beobachtungen an stationären Prozessen zur Ermittlung von Werten der Spektraldichte führen, eine Normalverteilung besitzen. Der Beweis beruht erstens auf der Einführung der spektralen Zufallsfunktionen des Prozesses in jene Schätzfunktionen selbst, wodurch sie die Form von Grenzwerten von (Riemann-Stieltjesschen) Summen von Zufallsgrößen erhalten. Nun zeigt es sich, daß diese Zufallsgrößen im allgemeinen voneinander abhängig sind, so daß der klassische Zentrale Grenzwertsatz nicht anwendbar ist. Diese Schwierigkeit ließ sich durch Anwendung einer Methode von *Loève* überwinden.

Die Kenntnis des Verteilungsgesetzes der hier untersuchten Schätzfunktionen ist allerdings noch nicht die vollständige Lösung des Problems, denn die Parameter der Verteilungsfunktion hängen ihrerseits von der (unbekannten) Spektraldichte ab. Der Wert des erzielten Ergebnisses liegt vielmehr darin, daß man die Gesamtheit der örtlichen Schätzungen der Spektraldichte als Realisation eines (nicht-stationären) Gaußschen Zufallsprozesses auffassen kann. Die Aufstellung einer neuen Schätzung, und zwar nunmehr einer Schätzung der mathematischen Erwartung jener Zufallsfunktion (als Problem des

„Glättens" in der Sprache des Praktikers) erscheint unter Zuhilfenahme des Maximum-Likelihood-Prinzips als durchaus erfolgversprechend (vgl. hierzu [4], Seite 551—555).

5. Schrifttum

Die gegebenen Literaturhinweise beschränken sich auf solche Anlässe, die wesentlich mit dem behandelten speziellen Problem zusammenhängen.

[1] *A. von Baranoff:* Über die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Klasse von Schätzfunktionen für die Spektraldichtenmatrix eines stationären mehrdimensionalen Zufallsprozesses. Deutsche Luft- und Raumfahrt, Forschungsbericht 67—89. Herausgegeben von der Zentralstelle für Luftfahrtdokumentation und -information, München 1967.

[2] *N. R. Goodman:* On the Joint Estimation of the Spectra, Cospectrum and Quadrature Spectrum of a Two-dimensional Stationary Gaussian Process. Scientific Paper No. 10, Eng. Statistical Lab., New York University, 1957.

[3] *M. Loève:* Probability Theory. Third Edition. Van Nostrand Co., New York, 1963.

[4] *V. S. Pugachev:* Theory of Random Functions. Pergamon Press, New York, 1965.